$\boxed{\textbf{Aula 49}}$

Séries de Fourier

Pelo método de separação de variáveis, as soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L \\ u(0,t) = T_0(t), \quad u(L,t) = T_L(t) \qquad t > 0 \end{cases}$$

obtidas por "combinação linear infinita" de soluções linearmente independentes da forma $X(x)T(t)$ são da forma

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}}$$

Para acertar a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ põe-se a questão de como representar uma função $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ "arbitrária" como uma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad ????$$

ou mais geralmente uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como uma série de senos e cosenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\int_{-L}^{L} \textsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \textsf{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \textsf{se} \quad n, m \geq 1$$

$$\int_{-L}^{L} \textsf{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \textsf{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \textsf{se} \quad n \neq m \geq 1 \\ L & \textsf{se} \quad n = m \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \textsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \textsf{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \textsf{se} \quad n \neq m \geq 1 \\ L & \textsf{se} \quad n = m \geq 1 \end{cases}$$

Coeficientes de Fourier de uma função f

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \textsf{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \textsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 1$$

Definição: Diz-se que uma função Lebesgue mensurável $f : [-L, L] \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ está no espaço $L^p([-L, L])$, para algum $1 \leq p < \infty$, se

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Nestes espaços, a quantidade

$$\|f\|_p = \left(\int_{-L}^{L} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma, com a qual a distância $d(f, g) = \|f - g\|$ faz de L^p um espaço métrico completo. Chama-se **espaço de Banach** a um espaço vectorial com norma que, com esta distância, é um espaço métrico completo: os espaços de Lebesgue L^p são espaços de Banach.

Os coeficientes de Fourier estão bem definidos desde que $f \in L^1([-L, L])$ porque

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \int_{-L}^{L} |f(x)| \, dx < \infty$$

e

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \int_{-L}^{L} |f(x)| \, dx < \infty$$

Definição: Dada uma função $f \in L^1([-L, L])$ designa-se por **série de Fourier de** f a série trigonométrica

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 1$$

Teorema (Riesz-Fischer): Dada uma função $f \in L^2([-L,L])$ a sua série de Fourier converge na norma $L^2([-L,L])$, isto é

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) - f(x) \right\|_2 = 0$$

Teorema (Fourier/Dirichlet): Dada uma função f periódica, de período $2L$, seccionalmente C^1 em $[-L,L]$, a sua série de Fourier converge em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ para a média dos limites laterais, ou seja

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Teorema (Lennart Carleson, 1966): Dada uma função $f \in L^2([-L, L])$, em particular uma função contínua, a sua série de Fourier converge pontualmente quase em toda a parte. Ou seja, exceptuando um conjunto de medida nula de Lebesgue de pontos em $[-L, L]$,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$